Eléments de mathématiques nécessaires en macroéconomie et en croissance

Francois Fontaine (francois.fontaine@univ-paris1.fr)

Ce polycopié n'est en rien un "précis" de mathématique. Il n'en a ni l'exactitude, ni la présentation rigoureuse. Il s'agit de rassembler les bases nécessaires à la compréhension des outils mathématiques utilisés dans vos cours de macroéconomie et de croissance. Une grande partie de la présentation est tirée des ouvrages de B. Guerrien, "Analyse mathématique pour économistes" (Economica), et D. Romer "Macroéconomie Approfondie" (Ediscience, McGraw-hill). Toute suggestion est la bienvenue pour améliorer et/ou compléter ce document.

Les dérivées

Définition

La dérivée d'une fonction $f(.)$ en un point a est notée $f'(a)$ et correspond à:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La dérivée est donc la limite du rapport des accroissement de f et de x, lorsque $x \to a$ (partant du point a, de combien augmente f, pour un accroissement de x infinitésimal). Géométriquement $f'(a)$ est la pente de la droite tangente à $f(.)$ au point a. On utilise aussi la notation:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ \textit{avec } \Delta x &= x - a \text{ et } \Delta f = f(x) - f(a) \end{aligned}$$

Remarque, $f'(a)$ se note aussi $\frac{\partial f(a)}{\partial a}$.

Dérivées à connaître

1) $(u.v)' = u'v + v'u$
2) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

d'où $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Les fonctions composées

Les fonctions composées sont des fonctions de fonctions. Par exemple, les fonctions de production macroéconomiques sont généralement des fonctions à plusieurs variables (le stock de capital physique K, le travail L...) qui sont elles-mêmes fonctions du temps:

$$\begin{aligned} Y(t) &= F\left[K(t), L(t)\right] \\ &= K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Théorème (dérivée d'une fonction de fonction):

Soit $g(x)$ une fonction dérivable en a et $f(x)$ une fonction dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et on a:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \times g'(a)$$

Application

Considérons d'abord le cas simple où $Y(t) = F\left[K(t)\right] = K(t)^{\alpha}$. Par rapport au théorème ci-dessus, notre $F[.]$ correspond au $f(x)$ et $K(.)$ au $g(x)$. F est une fonction de K qui est une fonction du temps. On peut donc appliquer la formule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(t)}{\partial t} &= F'[K(t)] \times \frac{\partial K(t)}{\partial t} \\ &= \alpha K(t)^{\alpha-1} \times \frac{\partial K(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

On remarquera que l'on note $\frac{\partial K(t)}{\partial t} = \dot{K}(t)$. Le cas général nécessite d'abord que soit présenté le concept de différentielle.

Différentielle d'une application

Différentielle d'une application en un point

La différentielle peut être présentée comme l'application *linéaire* tangente en un point d'une fonction. Qu'est-ce que cela peut-il bien vouloir dire? On a vu que la dérivée $f'(x)$ en x de f est donnée par, avec $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

$f'(x)$ mesure la pente de la tangente en $M = (x, f(x))$ au graphe de f. L'égalité (1) peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon(\Delta x) \text{ où } \epsilon(\Delta x) \to 0 \text{ lorsque } \Delta x \to 0 \tag{2}$$

Pour comprendre cela, il faut considérer schématiquement que la dérivée correspond au rapport des accroissements $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *à la limite*, c'est à dire quand $\Delta x \to 0$. Si l'on s'éloigne de cette

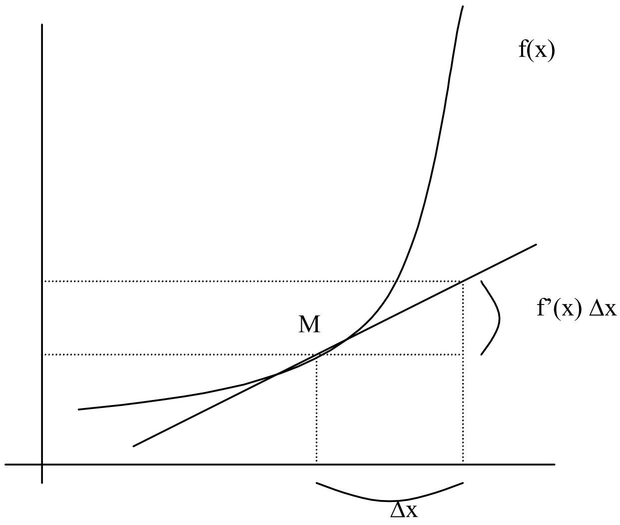

Figure 1: Représentation graphique de la dérivée de $f(x)$ en M (droite tangente) et de la différentielle de f, $df = f'(x)dx$.

limite, il faut rajouter ou retirer "quelque chose", ici représenté par $\epsilon(\Delta x)$. Ce quelque chose est d'autant plus petit que Δx est proche de zéro. La relation (2) implique:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x$$

On peut donc considérer que $f'(x)\Delta x$ donne une *valeur approchée* de Δf $(\Delta f(x) \simeq f'(x)\Delta x)$.

Cette approximation étant "d'autant meilleure" que Δx est petit. $f'(x)\Delta x$ est une application linéaire et est représentée graphiquement par une droite, la tangente de M au graphe de f. On voit sur la figure 1 que cette approximation linéaire est très approximative pour des valeurs importantes de Δx. On note cette application linéaire df_x et on a donc $df_x(\Delta x) = f'(x)\Delta x$. Cette notation se justifie de la manière suivante:

-d pour différentielle;

-df pour marquer le fait que c'est la différentielle de la fonction f;

-df_x parce que la différentielle est définie en un point x donnée, la différentielle étant une application linéaire de Δx et non de x.

Dans la pratique, comme on a $y = f(x)$, on écrit souvent pour simplifier les notations, $df_x = dy$.

Soit l'application identité définie par $i(x) = x$. La différentielle di_x au point x est donnée par :

$$\begin{aligned} di_x(\Delta x) &= i'(x)\Delta x = 1\Delta x \\ \textbf{on note donc } \mathbf{dx}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \mathbf{dx} \quad \textbf{par simplification des notations} \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} df_x &= dy = f'(x)dx \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

Différentielles à connaître
Elles se déduisent immédiatement de celles de la dérivée. Soit $f(x)$ et $g(x)$:

1) $d(f+g)_x = df_x + dg_x$
2) $d(fg)_x = g(x)df_x + f(x)dg_x$
3) $d(f/g)_x = \frac{g(x)df_x - f(x)dg_x}{(g(x))^2}$
4) $d(f \circ g)_x = (f \circ g)'(x)dx = f'[g(x)]\, g'(x)dx$

Différentielle d'une fonction à plusieurs variables

Soit $f(X)$ une fonction à plusieurs variables $X = (x_1, ..., x_n)$. La différentielle de f en un "point" ("vecteur") se note df_X et

$$df_X(\Delta X) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(X)\Delta x_i \tag{3}$$

Cette formule n'est que la généralisation de ce que l'on a pu voir précédemment.

Exemple:

Considérons $Y = F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ avec K et L deux variables dont on supposera préalablement qu'elles ne dépendent pas du temps. On a:

$$\begin{aligned}
dY &= F'_K dK + F'_L dL \\
&= \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} dK + (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} dL \\
&= \alpha \frac{Y}{K} dK + (1-\alpha) \frac{Y}{L} dL \\
&\Leftrightarrow \frac{dY}{Y} = \alpha \frac{dK}{K} + (1-\alpha)\frac{dL}{L}
\end{aligned}$$

Maintenant reprenons la même fonction, mais en considérant que les variables K et L dépendent du temps $Y(t) = F(K(t), L(t)) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$. Formellement, on va s'appuyer sur la formule des fonctions composées (F est une fonction de K et L qui sont eux-mêmes fonction du temps). On note $\dot{x}(t) = x'_t(t)$. On a donc:

$$\begin{aligned}
dY_t(\Delta t) &= \dot{Y}(t)dt = F'_k \dot{K(t)} dt + F'_L \dot{L}(t) dt \\
&\Rightarrow \dot{Y}(t) = F'_k \dot{K(t)} + F'_L \dot{L}(t) \\
&\Leftrightarrow \dot{Y}(t) = \alpha K(t)^{\alpha-1} L(t)^{1-\alpha} \dot{K(t)} + (1-\alpha) K(t)^\alpha L(t)^{-\alpha} \dot{L}(t) \\
&\Leftrightarrow \dot{Y}(t) = \alpha \frac{Y(t)}{K(t)} \dot{K(t)} + (1-\alpha) \frac{Y(t)}{L(t)} \dot{L}(t) \\
&\Leftrightarrow \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} + (1-\alpha) \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}
\end{aligned}$$

Comme certains d'entre-vous le savent, lorsque l'on a affaire avec des fonctions de type Cobb-Douglas (i.e. $A^x B^y$), il existe une manière simple de dériver le même résultat, en log-linéarisant la fonction $Y(t)$ puis en la dérivant par rapport au temps:

$$\log Y(t) = \alpha \log K(t) + (1-\alpha) \log L(t)$$

Ensuite on dérive le tout par rapport au temps, en se rappelant que $[\ln x(t)]'_t = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ ($\ln x(t)$ est encore une fonction composée).

$$\begin{aligned}
[\log Y(t)]'_t &= \alpha\,[\log K(t)]'_t + (1-\alpha)\,[\log L(t)]'_t \\
\Rightarrow \quad & \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha\frac{\dot{K(t)}}{K(t)} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}
\end{aligned}$$

Résolution d'équations différentielles linéaires

Un cas simple

Une équation différentielle est une équation qui contient des dérivées de variables. Par exemple:

$$a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) + x(t) = 0$$

Quand $x(t) = 0$ on dit que l'équation est homogène. On va considérer le cas:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0$$

On multiplie d'abord le tout par e^{at}, on obtient:

$$e^{at}\dot{y}(t) = -e^{at}ay(t)$$

On intègre ensuite les deux membres entre 0 et t :

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{as}\dot{y}(s)ds = -\int_0^t e^{as}ay(s)ds \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^t e^{as}\left(\dot{y}(s) + ay(s)\right)ds = 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Le terme e^{at} est appelé facteur d'intégration. Nous multiplions par le facteur d'intégration parce que le terme qui est à l'intérieur de l'intégrale devient la dérivée par rapport au temps de $e^{at}y(t)$[1]:

$$\left[e^{at}y(t)\right]'_t = e^{at}\left(\dot{y}(t) + ay(t)\right)$$

Puisque nous connaissons la primitive du terme de l'intégrale[2], (4) implique:

$$e^{at}y(t) - y(0) = 0$$

et donc (car $\frac{1}{e^{at}} = e^{-at}$)

$$y(t) = e^{-at}y(0)$$

[1]En réalité, la primitive de $e^{at}\left(\dot{y}(t) + ay(t)\right)$ n'est pas unique. Si l'on voulait être plus rigoureux, on aurait $\left[e^{at}y(t) + b\right]'_t = e^{at}\left(\dot{y}(t) + ay(t)\right)$ avec b une constante arbitraire.

[2]On rappelle que la primitive d'une fonction dérivée $f'(.)$ est cette fonction $f(.)$. D'où, par exemple, $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$.

Application

On va résoudre la question 3) de l'exercice 2 du TD 3. Je vous propose de vous aider du corrigé (n'hésitez pas à me poser des questions si vous avez des difficultés) pour montrer que:

$$\dot{v}(t) = (1-\alpha)s - (1-\alpha)(\delta+\gamma+n)v(t) \tag{5}$$

La variable $v(t) = k(t)^{1-\alpha}$ est une transformation de la variable $k(t)$ et nous permet d'étudier plus aisément la dynamique de cette dernière. Avec $\dot{k}(t)$, l'équation n'était pas linéaire, ce qui est toujours plus délicat à manier. On remarque que lorsque $v(t)$ est à son équilibre stationnaire, $k(t)$ l'est aussi. (5) est une équation différentielle du type $\dot{y}(t) + ay(t) + b = 0$. Comme précédemment on multiplie tout par le facteur d'intégration. Par rapport, au cas simple présenté ci-dessus on a:

$$\begin{aligned} a &= (1-\alpha)(\delta+\gamma+n) \\ \text{et donc } e^{at} &= e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t} \end{aligned}$$

Ensuite on intégre entre 0 et t:

$$\int_0^t e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)x}\dot{v}(x)dx = (1-\alpha)s\int_0^t e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)x}dx - (1-\alpha)(\delta+\gamma+n)\int_0^t e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)x}v(x)dx$$

On remarque

$$\left[e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t}v(t)\right]_t' = e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t}\dot{v}(t) + (1-\alpha)(\delta+\gamma+n)e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t}v(t)$$

On a donc:

$$\begin{aligned} & \left[e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)x}v(x)\right]_0^t = (1-\alpha)s\int_0^t e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)x}dx \\ \Rightarrow\quad & e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t}v(t) - v(0) = (1-\alpha)s\left[\frac{1}{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)}e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)x}\right]_0^t \\ \Rightarrow\quad & e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t}v(t) = v(0) + \frac{s}{(\delta+\gamma+n)}e^{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t} - \frac{s}{(\delta+\gamma+n)} \\ \Rightarrow\quad & v(t) = \frac{s}{(\delta+\gamma+n)} + \left(v(0) - \frac{s}{(\delta+\gamma+n)}\right)e^{-(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t} \end{aligned} \tag{6}$$

Or vous aurez préalablement montré que la valeur de v à l'équilibre stationnaire, $\bar{v}$, est $\frac{s}{(\delta+\gamma+n)}$. Donc (6) peut se réécrire:

$$v(t) = \bar{v} + (v(0) - \bar{v})e^{-(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t} \tag{7}$$

L'ouvrage de Barro et Sala-i-Martin sur la croissance donne, en annexe, une très bonne introduction à la résolution des équations différentielles, aux diagrammes des phases et plus largement à l'analyse des systèmes dynamiques utilisés en croissance. Selon la terminologie de Barro et Sala-i-Martin [1995], la vitesse de convergence de $v(t)$ vers $\bar{v}$ est égale à $|-(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t| = (1-\alpha)(\delta+\gamma+n)t$. La convergence est d'autant plus rapide que α, la part du capital dans la production, est faible et que $(\delta+\gamma+n)$ est élevé. La vitesse ne dépend ni de la valeur initiale $v(0)$ ni de celle du taux d'épargne s. La durée (en "années") du processes de convergence pour que v, partant d'une valeur initiale $v(0)$ quelconque, ait comblé $x\%$ de la distance entre $v(0)$ et la valeur d'équilibre de long terme $\bar{v}$, est T telle que:

$$\bar{v} - v(T) = (1 - x\%)(\bar{v} - v(0)) \tag{8}$$

L'équation (7) nous permet d'avoir l'expression de $v(T) - \bar{v}$ $(= (v(0) - \bar{v})e^{-(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)T})$. En utilisant cette expression et l'équation (8) on obtient:

$$\begin{aligned} \ln(\bar{v} - v(T)) &= \ln(1 - x\%) + \ln(\bar{v} - v(0)) \\ \ln(\bar{v} - v(0)) + \ln e^{-(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)T} &= \ln(1 - x\%) + \ln(\bar{v} - v(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)T = \ln(1 - x\%) \\ &\Rightarrow T = -\frac{1}{(1-\alpha)(\delta+\gamma+n)} \ln(1 - x\%) \end{aligned}$$